

# Über das Mach'sche Prinzip

Von HELMUT HÖNL

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Freiburg

(Z. Naturforsch. **8a**, 2–6 [1953]; eingegangen am 11. September 1952)

*Erwin Fues zum 60. Geburtstag gewidmet*

Es wird das Machsche kosmologische Prinzip als ein „regulatives“ (nicht „konstitutives“) Prinzip der Erfahrung aufgefaßt, das in der Größenordnungsbeziehung  $\propto M \approx R$  zwischen Gesamtmasse  $M$  des Universums und mittlerem (positivem) Krümmungsradius  $R$  des Kosmos seinen gemäßen Ausdruck findet ( $\propto$  Gravitationszahl). Mit dieser Forderung ist nur ein räumlich geschlossener *endlicher* Kosmos vereinbar.

1. Bei der Erörterung der Gründe, welche eine Erweiterung des „speziellen“ Relativitätspostulats nahelegen, weist Einstein in seiner abschließenden Arbeit über die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie<sup>1</sup> außer auf den Gesichtspunkt der Kovarianz der die allgemeinen Naturgesetze ausdrückenden Gleichungen auf das von ihm sogenannte „Mach'sche Prinzip“ hin. Bekanntlich gibt die Newtonsche Mechanik auf die Frage, warum auf ein bestimmtes Bezugssystem  $K_1$  die Grundgleichungen der Mechanik Anwendung finden, auf ein relativ zu  $K_2$  rotierendes (allgemein beschleunigtes) Bezugssystem  $K_1$  dagegen nicht, keine theoretisch befriedigende Antwort. Sie zeichnet lediglich Bezugssysteme von der Art  $K_1$  vor anderen als „berechtigte“ Bezugssysteme aus; der physikalische Grund für die Auszeichnung eines Systems  $K_1$  gegenüber einem System  $K_2$  wird also nicht in „beobachtbaren Tatsachen“, sondern in einer „bloß fingierten Ursache“, dem Galilei-Newtonischen Raum  $R_1$ , gesucht, in bezug auf welchen sich  $K_1$  in Ruhe befindet. Letzten Endes ist diese „Erklärung“ eine Tautologie.

Einstein fordert demgegenüber, sich hierin eng an Machs Kritik der Newtonschen Mechanik<sup>2</sup> anschließend, „daß die allgemeinen Bewegungsgesetze“, welche beispielsweise die Gestalten zweier relativ zueinander um eine gemeinsame Achse rotierender flüssiger Körper  $S_1$  und  $S_2$  (in hinreichend großem Abstand voneinander) bestimmen, „derart sein müssen, daß das mechanische Verhalten von  $S_1$  und  $S_2$  ganz wesentlich durch ferne Massen mitbedingt werden muß, welche wir nicht zu dem betrachteten System mitgerechnet hatten. Diese fer-

nen Massen (und ihre Relativbewegungen gegen die betrachteten Körper) sind dann als Träger prinzipiell beobachtbarer Ursachen für das verschiedene Verhalten unserer betrachteten Körper anzusehen: sie übernehmen die Rolle der fingierten Ursache  $R_1$ . Von allen denkbaren, relativ zueinander beliebig bewegten Räumen  $R_1$ ,  $R_2$  usw. darf a priori keiner als bevorzugt angesehen werden, wenn nicht der dargelegte erkenntnistheoretische Einwand wieder auflieben soll.“ (Machsches Prinzip.)

Spätere Kritiker, insbesondere Weyl und Pauli, haben jedoch darauf hingewiesen, daß es nicht eigentlich im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie gelegen ist, diese von vornherein mit einer Kosmologie zu verquicken. Die zentrale mathematische Idee der allgemeinen Relativitätstheorie ist die *Kovarianz* der Gleichungen der Physik gegenüber der umfassenden Gruppe aller stetigen Koordinaten-Transformationen des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums. In mathematischer Präzisierung dieses Gedankens wird man etwa, wie dies die spätere Entwicklung mit sich gebracht hat (Hilbert, Einstein, Weyl), von einem vierdimensional gefaßten Variationsprinzip:

$$\delta W = \delta \int \int \int \int \mathcal{G} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = 0 \quad (1)$$

ausgehen ( $W$  = Wirkungsgröße,  $\mathcal{G}$  = Tensordichte des Gravitations- und Materiefeldes) und aus diesem die Differentialgleichungen des Gravitations- und Materiefeldes (einschließlich des elektromagnetischen Feldes) als Euler-Lagrangesche Gleichungen hervorgehen lassen. Die auf diese Weise begründete Theorie der Gravitation und der metrischen Verhältnisse von Raum und Zeit ist in der

<sup>1</sup> A. Einstein, Ann. Physik, **49**, 769 [1916].

<sup>2</sup> E. Mach, Die Prinzipien der Mechanik, historisch-kritisch dargestellt, Leipzig 1897, S. 216 ff.



Tat völlig in sich geschlossen und bedarf keiner Stütze durch ein kosmologisches Prinzip.

Die Anwendung der allgemeinen Relativitätstheorie sowohl auf Einzelprobleme als auch auf das ganze Universum (kosmologische Modelle) hat nun zu Ergebnissen geführt, welche mit der früheren Newtonschen Raum-Zeit-Theorie eine bemerkenswerte Analogie aufweisen. Will man beispielsweise das Gravitationsfeld bestimmen, welches einer (in einem bestimmten Koordinatensystem ruhenden) zentrale symmetrischen Massenverteilung, etwa der Sonne, zugehört, so hat man eine räumlich zentrale symmetrische statische Lösung der Gravitationsgleichungen aufzusuchen, dergestalt, daß das Linienelement im räumlich Unendlichen in dasjenige der speziellen Relativitätstheorie übergeht (Schwarzschild'sche Lösung). Diese nach einem Satze von Birkhoff allein schon aus der Zentrale symmetrie des Vakuumfeldes und den Gravitationsgleichungen folgenden „Grenzbedingungen im Unendlichen“ bestimmen also maßgebend die solar-relativistischen Effekte, wie die Rotverschiebung, die Perihelbewegung der Planeten und die Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne, und sind somit der Ersatz für Newtons absoluten Raum-Begriff; sie bestimmen ebenso wie dieser das Führungsfeld für Licht und Materie und erweisen damit — in Weyls Ausdrucksweise — die „Übermacht des Äthers“ gegenüber der im Raum wie zufällig eingestreuten Materie.

Auch die Erweiterung der ursprünglichen Einsteinschen Gravitationsgleichungen ( $G_{i\kappa} = 0$ ) durch das kosmologische Glied ( $G_{i\kappa} = \lambda g_{i\kappa}$ ) führte — vom Standpunkt des Machschen Prinzips aus beurteilt — zu keiner befriedigenden Situation. Es lassen sich Lösungen der erweiterten Gleichungen für zeitlich veränderliche Raumformen sowohl von positiver als auch von negativer Raumkrümmung als schließlich auch von der Krümmung Null angeben (Friedmann, Lemaitre, Heckmann<sup>3</sup>). Die Feldgleichungen selbst sind somit indifferent gegenüber der kosmologischen Struktur des Universums im großen: es sind ebenso räumlich geschlossene wie gegen das räumlich Unendliche „offene“ Weltmodelle möglich. Insbesondere konnte de Sitter zeigen<sup>3</sup>, daß mit den erweiterten Gravitationsgleichungen ein expandierender, von Materie völlig entleerter Kosmos vereinbar ist. Die dem Machschen Prinzip ent-

sprechende Forderung, daß die Struktur des Universums durch das Vorhandensein von Materie wenigstens *mitbestimmt* wird, ist in diesem Falle in keiner Weise erfüllt. Andererseits werden durch die kosmologischen Lösungen der Gravitationsgleichungen stets „natürliche“ raumzeitliche Koordinatensysteme ausgezeichnet — in Anwendung auf die realen Gegebenheiten im Kosmos diejenigen, bezüglich welcher sich der Schwerpunkt einer größeren Zahl benachbarter Spiralnebel in Ruhe befindet —, so daß wir auch hier wieder — ungeachtet der allgemeinen Kovarianz der Grundgleichungen — analoge Verhältnisse wie beim Newtonschen absoluten Raum antreffen.

2. Worin kann, angesichts dieser Verhältnisse, die Bedeutung der Mach-Einstein'schen Forderung bestehen, daß die metrischen und dynamischen Verhältnisse von Raum und Zeit durch die Verteilung der Materie *im Raume* selbst bestimmt sein sollen? Gerade die naive, unserem Kausalbedürfnis entgegenkommende Anschaulichkeit dieser Forderung hat ja seit jeher dem Machschen Prinzip eine so eigentümlich suggestive Kraft verliehen.

Einen bedeutungsvollen Hinweis hierzu hat schon bald nach Aufstellung der Grundgleichungen der Gravitation Thirring's Untersuchung über die Relativität der Fliehkräfte gegeben<sup>4</sup>. Geht man von einem speziellen gravitationsfreien Koordinatensystem, bzgl. dessen das Linienelement der speziellen Relativitätstheorie gilt, als „Nullsystem“ aus und wird eine mit Masse gleichmäßig belegte, mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierende Hohlkugel (mit dem räumlichen Koordinatenursprung als Mittelpunkt) angenommen, so treten nach Thirring (wie sich aus den Einsteinschen Näherungsgleichungen für die „Gravitationspotentiale“  $\gamma_{i\kappa}$  ergibt) in der Nähe des Kugelmittelpunktes massenproportionale Zusatzkräfte als Folge der Kugelrotation auf, welche gerade die Form von Zentrifugal- und Corioliskraft besitzen, also bezogen auf die Masseneinheit die Gestalt

$$\ddot{\mathfrak{F}} = \alpha (2[\mathfrak{v}\omega] + [\omega, [\mathfrak{v}\omega]]) \quad (2)$$

annehmen ( $\mathfrak{v}$  = Geschwindigkeit im Nullsystem,  $\mathfrak{r}$  Radiusvektor); hierin ist  $\alpha$  ein Faktor, welcher von der Größenordnung des Verhältnisses von „Gravitationsradius“  $\alpha M$  der Kugelmasse  $M$  zu deren geometrischen Radius  $a$  ist, wenn  $\alpha$  die relativistische

<sup>3</sup> Bezüglich der Einzelheiten verweisen wir auf die ausgezeichneten Darstellungen bei O. Heckmann, Theorien der Kosmologie, Springer 1952; R. C. Tolman, Relativity, Thermodynamics and Cosmology,

Oxford 1934; P. Jordan, Schwerkraft und Weltall, Vieweg, Braunschweig 1952.

<sup>4</sup> H. Thirring, Physik. Z. 19, 33 [1918]; 22, 29 [1921].

Gravitationskonstante bedeutet, also

$$\alpha \approx \frac{\kappa M}{a} \quad (3)$$

( $\kappa = 8\pi f/c^2$ ,  $f$  = Newtonsche Gravitationskonstante).

Dem physikalischen Sinne nach bedeutet (2), daß durch bloße Umlaufbewegung von Massen im Zentrum der Bewegung Zusatzbeschleunigungen von demselben Typus „induziert“ werden, wie sie sonst in nicht-galileischen rotierenden Koordinatensystemen mit der entgegengesetzt gleichen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gegen ein berechtigtes Bezugssystem registriert werden; aber der Proportionalitätsfaktor  $\alpha$  ist gemäß (3) unter normalen Verhältnissen *winzig klein*<sup>5</sup>. Frägt man nach der *Bedingung dafür, daß  $\alpha$  dem Wert 1 nahekommt*, so ergibt sich aus (3) mit  $a = R$ :

$$\kappa M \approx R. \quad (4)$$

Unter welchen Umständen darf diese Bedingung als erfüllt angesehen werden?

Als Thirring 1918 seine Überlegungen anstellte, stand die Kosmologie gleichsam noch in den Kinderschuhen. In den seither vergangenen mehr als dreißig Jahren hat sie aber, besonders durch die Entdeckung des Hubble-Effektes, sowohl in empirischer als auch in theoretischer Hinsicht bedeutsame Fortschritte gemacht. So übersehen wir heute nach der Durchrechnung aller denkbaren kosmologischen Modelle<sup>3</sup>, daß die Größenordnungsmäßige Beziehung (4) bei allen räumlich geschlossenen Modellen von endlicher (nicht-verschwindender) Gesamtmasse  $M$  auftritt, wobei dann  $R$  den mittleren Krümmungsradius des dreidimensionalen Raumes von *positiver Krümmung* bedeutet<sup>6</sup>. Es sei zugleich darauf hingewiesen, daß es dabei gar nicht nötig ist, auf die durch das kosmologische  $\lambda$ -Glied erweiterten Gravitationsgleichungen zurückzugreifen, nachdem sich herausgestellt hat, daß die Tatsache der Expansion des Universums auch auf Grund der ursprünglichen Einsteinschen Gravitationsgleichungen ungezwungen gedeutet werden kann; die letztere Auffassung dürfte zudem vom theoretischen Stand-

<sup>5</sup> Selbst für die Rotation des ganzen Milchstraßensystems wird  $\alpha = \kappa \int dM/a$  nur von der Größenordnung  $10^{-7}$ .

<sup>6</sup> Es soll damit übrigens nicht gesagt sein, daß (4) in allen Entwicklungsphasen des Kosmos erfüllt zu sein braucht; beispielsweise ist bei den Kosmologien mit konstanter Gesamtmasse  $M$  der Weltradius  $R$  in den „Anfangsstadien“ des Kosmos beliebig klein (gleichzeitig wäre die Expansion  $(1/R) dR/dt$  beliebig groß). Dagegen gilt die Größenordnungsmäßige Beziehung (4), wenn man für  $R$  bei den zeitlich periodischen Lösungen

punkt aus wesentlich befriedigender sein<sup>7</sup>. Ebenso stellt (4) eine der wichtigsten Beziehungen der neuen Dirac-Jordanschen Kosmologie mit zeitlich veränderlicher Gravitationszahl dar, die neuerdings von Jordan<sup>8</sup> im Sinne seiner projektiven Relativitätstheorie theoretisch tiefer unterbaut werden konnte.

Diese Verhältnisse legen es nahe, den Gedankengang umzukehren und als *kosmologisches Prinzip* zu fordern, daß für das reale Universum die Größenordnungsmäßige Beziehung (4) mit endlichen Werten von  $M$  und  $R$  erfüllt sein solle. Durch diese Forderung wird zunächst ein räumlich unendliches Universum ( $M = \infty$ ) ausgeschlossen; das Universum wird damit als *endlich* und *räumlich geschlossen* postuliert. Gleichzeitig wird aber, in Anwendung auf den *ganzen Kosmos*, der Faktor  $\alpha$  in (2) von der Größenordnung 1. Indem wir  $\alpha$ , wie noch genauer zu rechtfertigen sein wird, gerade = 1 setzen, wird  $\omega$  in (2) genau gleich der auf die Masseneinheit ausübten Führungskraft, wie sie in einem mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierenden Bezugssystem beobachtet wird. Diesen Sachverhalt können wir (dabei  $\alpha = 1$  vorausgesetzt) als Ausdruck der *Relativität der Drehung* deuten: es ist jetzt gleichgültig, ob wir hinsichtlich des Universums sagen, daß es ruhe und sich der Beobachter in einem Bezugssystem befindet, das gegenüber den Massen des Universums mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotiert; oder ob wir sagen, daß die beobachtete Führungskraft vom Typus einer Zentrifugal- und Corioliskraft durch eine Art Induktion der Massen des ganzen Universums infolge ihrer „scheinbaren“ Bewegung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  hervorgebracht werde. Der kinematischen Gleichwertigkeit beider Auffassungen läßt sich jetzt eine dynamische an die Seite setzen.

Der genauen Bedeutung nach besagt (4), daß die mittlere (positive) Raumkrümmung  $1/R$  der Gesamtmasse  $M$  des Kosmos umgekehrt proportional ist<sup>9</sup>, wobei der dimensionierte Proportionalitätsfaktor jedenfalls der Größenordnung nach festge-

den maximal erreichbaren Weltradius  $R_{\max}$ , d. i. die eigentlich *charakteristische* Länge des Expansionsgesetzes, einsetzt. Man vgl. hierzu auch die Schlüsse bemerkungen.

<sup>7</sup> Vgl. P. Jordan<sup>3</sup>, S. 80 u. 104; H. Hönl, Ann. Physik, 6, 169 [1949].

<sup>8</sup> P. Jordan<sup>3</sup>, S. 107 ff.

<sup>9</sup> Dieser Zusammenhang wurde erstmalig in Einsteins grundlegender kosmologischer Arbeit, S.-B. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. 1917, aufgedeckt.

legt ist<sup>10</sup>: die für die Metrik und Gravitation maßgebende Raumkrümmung ist also *wesentlich* und im Großen genommen sogar *ausschließlich*<sup>11</sup> durch die Gesamtmasse des Kosmos bestimmt. Hält man dieses Ergebnis mit der ebenfalls aus (4) hervorgehenden Relativität der Drehbewegungen zusammen, so hat man gerade diejenigen beiden Argumente vereinigt, welche den Mach-Einstenschen Forderungen an eine logisch befriedigende Auffassung des Bewegungsproblems entsprechen. *In diesem Sinne ist (4) die exakte Fassung des Machschen Prinzips.* Es folgt dann, wie wir gesehen haben, aus dieser Fassung zugleich, daß der Kosmos räumlich geschlossen und endlich sein muß<sup>12</sup>, da andernfalls die Forderung (4) sinnlos sein würde.

3. Diese Betrachtungen sind ihrem wesentlichen Gehalt nach wohl kaum neu. Unsere Darstellung dürfte die entscheidende kosmologische Bedeutung der Beziehung (4) aber wohl in ein neues Licht rücken. Es ist daher geboten, daß wir zu einigen Punkten noch etwas eingehender kritisch Stellung nehmen.

Zunächst bedarf unsere Annahme  $\alpha = 1$  bei der Ausdehnung des Ergebnisses (2), (3) auf das *ganze* Universum einer Rechtfertigung. Diese Extrapolation ist vom Ausgangspunkt der Thirringischen Rechnung her natürlich nicht ohne weiteres erlaubt. (Bei Thirring wurde ja für das Nullsystem ein Linienelement im Sinne der speziellen Relativitätstheorie vorausgesetzt und es wurden demgemäß, im Gegensatz zu einem endlichen Kosmos, Grenzbedingungen im Unendlichen eingeführt). Es dürfte jedoch keine prinzipiellen Schwierigkeiten bieten, die Thirringischen Rechnungen auf eine rotierende Hohlkugel innerhalb eines geschlossenen

<sup>10</sup> Der „Gravitationsradius“  $\alpha M$  der Erde beträgt etwa 3 mm, derjenige der Sonne 3,7 km. Daß der Gravitationsradius der Gesamtmasse des Universums nach (4) von der Größenordnung des Weltradius von rund  $10^9$  Lichtjahren sein soll, demonstriert eindrucksvoll die ungeheure Gesamtmasse des Weltalls.

<sup>11</sup> Hierbei stützen wir uns allerdings auf das „Homogenitätspostulat“, wonach die mittlere Massendichte im Kosmos etwa *gleichförmig* ist. Diese Annahme wird durch unsere heutige Kenntnis über die Verteilung der Spiralnebel im allgemeinen gut bestätigt; die mittlere Massendichte im Kosmos liegt zwischen  $10^{-28}$  und  $10^{-29}$  g/cm<sup>3</sup> (nach F. Zwicky evtl. auch größer, von der Ordnung  $10^{-26}$  g/cm<sup>3</sup>).

<sup>12</sup> Entgegen der traditionell üblichen Auffassung möchten wir die Ansicht aussprechen, daß ein räumlich *unendliches* Universum zwar denkmöglich, wohl aber anschauungs- unmöglich ist. Schon Kant spricht im Hinblick auf den Euklidischen Raum von einem

dreidimensionalen Kugelraumes zu übertragen. Aber auch dann wäre eine Extrapolation in dem genannten Sinne nicht streng durchführbar, wenn Masse und Radius der rotierenden Kugel gegenüber Masse und Krümmungsradius des ganzen Kosmos nicht mehr vernachlässigbar klein sind. Trotzdem werden hiervon unsere prinzipiellen Überlegungen nicht berührt. Denn der Wert  $\alpha = 1$  für den strikten Grenzfall einer relativen Drehbewegung des Beobachters relativ zur galaktischen Sphäre steht ja schon auf Grund der elementarsten Überlegungen fest (Theorie der bei Rotation auftretenden „Scheinkräfte“). Es bleibt dann nur noch aufzuklären, wie eine *bloß qualitative* Forderung wie (4) zu einer quantitativen Bestimmung ( $\alpha = 1$ ) überleiten kann.

Die Auflösung dieser scheinbaren Schwierigkeit liegt darin, daß sich das Machsche Prinzip seinem Wesen nach überhaupt nicht in eine quantitativ formulierbare Beziehung zwischen Größen umsetzen läßt; dem entspricht die bloße Größenordnungsbeziehung (4). Alles, was sich an *gesetzlichen* Beziehungen im Kosmos überhaupt formulieren läßt, muß in den die allgemeinen Naturgesetze ausdrückenden kovarianten Grundgleichungen enthalten sein, oder — in knappester Zusammenfassung — aus einem Variationsprinzip der Gestalt (1) ableitbar sein. Es besteht sonach ein Rangunterschied zwischen den mathematisch exakt faßbaren Grundprinzipien und dem Machschen Prinzip. Die Feldgleichungen der Gravitation zusammen mit dem Bewegungsgesetz (in Gestalt des Prinzips der geradesten Bahn) enthalten an sich schon *vollständig* alle Aussagen über die Trägheitswirkungen der Materie. Die Funktion des Machschen Prinzips ist dann lediglich die, unter den nach den Feldgleichungen

„progressus in infinitum“ (Kritik der reinen Vernunft) und bezeichnet damit die prinzipielle Unabschließbarkeit der Erfahrung eines unendlichen Raumes. Ein im Einklang mit dem Homogenitätspostulat mit Materie (im Mittel) gleichförmig erfülltes Universum wäre sonach in des Wortes eigentlicher Bedeutung ein „*Unding*“ — schon deswegen, weil dann auch das Homogenitätspostulat jede mögliche Erfahrung überschreiten würde; bei Annahme einer (im Mittel) nicht homogenen Massenverteilung verwickelt man sich aber in noch ärgerle Widersprüche (Lamberts hierarchische Kosmologie oder Einstens Verödungseinwand). Diese Widersprüche werden bei einem *endlichen* Raum vermieden. Die Annahme eines endlichen Raumes ist daher nicht nur *denkmöglich*, sondern geradezu denk- und anschauungsnotwendig. — Andererseits soll nicht verkannt werden, daß sämtliche modernen Kosmologien, insbesondere was die *zeitliche* Entwicklung des Kosmos betrifft, noch immer einen stark antinomischen Charakter haben.

möglichen Weltmodellen eine bestimmte Auswahl zu treffen: *das Machsche Prinzip ist ein Auswahlprinzip*. Diese Auswahl ist freilich keine willkürliche, sondern sie setzt ein bestimmtes, nicht weiter reduzierbares Verhältnis der Grundbegriffe Raum, Zeit und Materie schon voraus. Vielleicht ist es nicht abwegig, an die Unterscheidung Kants zwischen „konstitutiven“ und *bloß „regulativen“* Prinzipien der Erfahrung \* zu erinnern; vielleicht ist gerade die Kantische Terminologie geeignet, das Verhältnis der Grundgleichungen der Physik zum Machschen Prinzip in ein klareres Licht zu setzen: Wir möchten von den Grundprinzipien, aus denen unter anderem die Feldgleichungen der Physik her-

\* Kritik d. reinen Vernunft, siehe vor allem den Anhang zur transzendentalen Dialektik.

vorgehen, sagen, daß sie für den Aufbau der Erfahrung, wie er in der Physik vollzogen wird, „konstitutiv“ seien, während demgegenüber dem Machschen Prinzip nur der Charakter eines „regulativen Prinzips der Erfahrung“ zukomme. Ein derart regulatives Prinzip muß vor allem dort zur Auswirkung gelangen, wo es sich — wie in der Kosmologie — um die Totalität von Erfahrungen handelt. Es wird von hieraus vielleicht verständlicher, daß das Machsche Prinzip, obwohl vom Standpunkt der fundamentalen physikalischen Prinzipien aus beurteilt nur akzidentiell, doch hinsichtlich der Auffassung des Kosmos als eines Ganzen — hinsichtlich der Frage nach Endlichkeit oder Unendlichkeit des Universums — von entscheidender Bedeutung sein kann.

## Statistische Untersuchung des Grundprozesses der Quantentheorie der Elementarteilchen

Von FRITZ BOPP

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforschg. 8a, 6—13 [1953]; eingegangen am 30. September 1952)

*Erwin Fues zum 60. Geburtstag*

Der Grundprozeß der Quantentheorie der Teilchen, die Erzeugung oder Vernichtung eines Teilchens in einem Punkt, wird elementarstatistisch und quantenstatistisch analysiert. Es wird gezeigt, daß man jede Gesamtheit von Grundprozessen elementarstatistisch behandeln kann, wenn man gewisse Bedingungen einhält, die davon herrühren, daß die elementare Statistik nichtumkehrbaren Prozessen angepaßt ist, während die quantenstatistischen Prozesse umkehrbar sind.

*To be or not to be  
that is the question*

### 1. Der Grundprozeß der Quantentheorie

Die Quantentheorie der Elementarteilchen steht im logischen Aufbau über der Quantenmechanik. Denn diese folgt aus jener deduktiv, jene aus dieser induktiv. Hieraus ergibt sich, daß die Analyse der Grundlagen von der Quantentheorie der Teilchen ausgehen muß, sobald die Induktion genügend weit fortgeschritten ist.

Diese Feststellung wird dadurch unterstrichen, daß die Operatoren in der Quantentheorie der Teilchen eine einfache und einheitliche Bedeutung haben. Sie beschreiben (bei Verwendung von Lagekoordinaten) die Vernichtung oder die Erzeugung eines Teilchens *hier und jetzt*. Dies gilt sogar in nicht-relativistischer Näherung, obwohl in ihr Vernich-

tungs- und Erzeugungsoperatoren stets so verbunden sind, daß die Zahl der Teilchen konstant bleibt.

Alle Operatoren der Quantentheorie stimmen also in ihrer Funktion überein. Ihre Mannigfaltigkeit ergibt sich allein daraus, daß gleichartige Operatoren auf verschiedene Punkte in Raum und Zeit und auf verschiedenartige Teilchen bezogen sind. Um die Operatoren zu untersuchen, genügt es daher, einen einzigen zu analysieren. Er beschreibt den *Grundprozeß der Quantentheorie*: Erzeugung und Vernichtung eines Teilchens in einem Punkt.

Nur diesen Prozeß wollen wir hier behandeln. Es ist der einfachste Quantenprozeß, weil nur dichotomische Variable und reelle Transformationen vorkommen. Wir stellen die Untersuchung der Voraussetzungen zurück, welche die gesamte Quanten-